

文章编号 1004-924X(2007)07-1009-07

基于线性代数和正则化方法的驻留时间算法

邓伟杰^{1,2}, 郑立功¹, 史亚莉^{1,2}, 王孝坤^{1,2}, 张学军¹

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

摘要:将加工的数学模型由去除函数与驻留时间的卷积过程转变为去除矩阵与驻留时间向量的乘积过程,从而将驻留时间的计算变为线性方程的求解。因测量误差而引入的噪声导致了方程的病态,传统的数值计算方法失效,因此,用 Tikhonov 正则化对建立的模型进行求解。采用了无须任何先验知识的自适应方法选取正则化参数。对同一组数据采用其他的驻留时间算法进行计算并对比,精度提高了 30% 以上。最后对一组面形数据使用实际参数进行了模拟加工,加工后的 PV、RMS 的收敛比率分别达到 0.48, 0.62, 满足实际驻留时间的求解要求。该方法稳定收敛,精度高,设置灵活,是一种较实用的驻留时间算法。

关键词:非球面加工;驻留时间算法;正则化方法

中图分类号:TQ171.68;TP391.7 **文献标识码:**A

Dwell time algorithm based on matrix algebra and regularization method

DENG Wei-jie^{1,2}, ZHENG Li-gong¹, SHI Ya-li^{1,2}, WANG Xiao-kun^{1,2}, ZHANG Xue-jun¹

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China; 2. Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: A novel algorithm to solve dwell time based on linear algebra (matrix-based algorithm) is discussed, in which math model changes the fabrication process from convolution to matrix product, so that the calculation of the dwell time becomes a solution to linear equations. Traditional factorization methods such as Gaussian elimination and total least squares can not be used because the linear equations are severely ill condition. So, the Tikhonov regularization is used to solve the ill-posed problem caused by meterage error, and the regularization parameter is determined adaptive method without any prior knowledge. By comparing with different algorithms, the advantages of the matrix-based algorithm are obviously with the precision enhancing 30%. In the end, an error data is solved with actual parameters using the matrix-based algorithm. The simulation results show that the convergence rates of the PV and RMS values can reach up to 0.48 and 0.62, respectively. The matrix-based algorithm can satisfy the requirement of fabrication very well.

Key words: aspheric processing; dwell time algorithm; regularization method

收稿日期:2007-01-19;修订日期:2007-05-29.

基金项目:国家杰出青年基金资助项目(No. 6992512);长春光机所二期创新基金资助项目

1 引言

计算机控制光学表面成形技术(CCOS)是本世纪 70 年代初期美国 Itek 公司的 W. J. Rupp 提出的一种新型光学加工技术。在大口径、高陡度非球面(特别是离轴非球面)的加工中,这项技术具有非常重要的作用和地位。其工作原理是根据定量的面形检测数据,选择合适的加工参数,用计算机控制一个小磨头,以特定的路径、速度和压力在光学表面运动,实现对光学元件进行研磨或抛光,并通过控制磨头与工件间的相对压力,速度及磨头在工件表面的驻留时间来控制材料的去除量^[1]。现在国内外的 CCOS 抛光理论模型大多是基于 Preston 方程,即材料的去除率正比于磨头相对工件的压力和速度。在实际加工中,为简化控制,一般采用固定的压力和磨头转速而只控制驻留时间。从而 CCOS 的加工过程可以描述为:表面材料去除量等于磨头的去除函数(磨头在单位时间内的材料去除量)与驻留时间函数沿磨头移动路径的卷积^[2]。

由上面的介绍可知,驻留时间函数的求解可以看成是一个反卷积的数学过程。国内外常见的驻留时间函数求解的方法有迭代算法和傅里叶变换法。迭代算法^[3]采用数值计算中常用的逐渐逼近法,先赋给驻留时间一个初始值(一般取残差分布),再计算卷积后的残余误差并得到一个新的驻留时间函数,如此反复,直到满足收敛条件。它的缺点是迭代的收敛速度较慢,而且在某些情况下会因发生振荡而无法收敛。傅里叶变换法^[4]利用时域的卷积计算等同频域的乘积计算的特性,先将材料去除量、去除函数进行傅里叶变换,两者相除得到驻留函数的傅里叶变换式,再做傅里叶逆变换即可。它的计算量相对迭代方法小,但是对接近零的去除函数进行傅里叶变换会出现困难。计算中的某些参数需要经验设定,且计算结果大多是正负交替,需要进行特殊处理,不能保证一定收敛。

本文从线性代数的角度,把加工的数学模型由驻留时间函数与去除函数的卷积过程转变为去除矩阵与驻留时间向量的乘积过程。由于实际面形测量值、加工的驻留点都是离散分布的,把卷积离散化为矩阵代数是十分贴近工程实际的。并

且,考虑到测量中不可避免的误差,驻留时间函数的求解变为一个典型的病态不适定问题。本文使用了 Tikhonov 正则化方法对病态方程进行求解,保证了驻留时间解的稳定性,并使用不需要任何先验知识的自适应法选取了正则化参数。最后对实际加工中的一组数据进行了模拟加工,取得了理想的收敛效果。

2 模型建立

2.1 去除函数^[5]

CCOS 的去除函数通常是先进行理论计算再通过工艺试验改进而得到的,具体形式与磨头的运动方式有关。磨头在平动的同时围绕定轴转动,称作平转动。平转动工作下的磨头在对光学表面进行加工时,特别是对非球面面形进行加工时,与被加工表面的吻合程度相对较好,且由于平转动时磨头上各点的线速度相同,因而磨头各点的磨损情况相同。因此,平转动是 CCOS 中较常用的磨头运动方式。本文的公式推导和模拟加工部分也是以平转动为例的。它的去除函数可以表示为:

$$R(r') = \begin{cases} 2eKp \arccos\left(\frac{r'^2 + e^2 - r^2}{2r'e}\right) & r - e < r' \leq r + e \\ 2\pi eKp & 0 \leq r' \leq r - e \end{cases} \quad (1)$$

上式中 r 为磨头的半径, e 为偏心距, r' 为去除点与磨头平转动中心的距离, K 为比例系数, p 为接触压力。

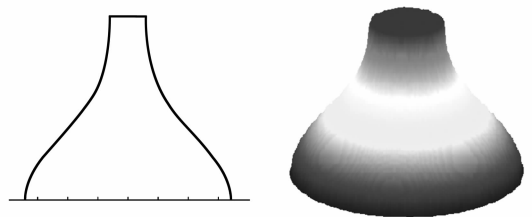


图 1 磨头平转动去除特性曲线

Fig. 1 Performance curve of polishing pad

图 1 表示的是磨头的理论去除特性曲线。在 $r' = r - e$ 处,特性曲线有一个突变,这样的去除函数会使加工后的面形高频误差增大。为了解决这个问题,在实际加工中,磨头与运动机构之间采用球铰连接,使磨头具有一定的随动自由度。为简化计

算,驻留时间的求解仍使用理论去除函数。

2.2 模型公式推导

在实际加工中,磨头平转动的轴对应着工件上的轨迹点,这些点称为驻留点,是一个离散的点序列。对现有的大多数的面形测量方法^[6-7]而言,测量的结果也都是离散的,加工去除的结果实际上只在这些点是可表征的,称为去除点。根据式(1),当磨头驻留在点 $A(x_d, y_d)$ 时,磨头对在去除范围内的点 $B(x_i', y_i')$ 处的单位时间去除量为:

$$R(x_d, y_d; x_i', y_i') = R(r')$$

$$r' = \sqrt{(x_i' - x_d)^2 + (y_i' - y_d)^2}$$

若磨头驻留 A 点处的时间为 $D(x_d, y_d)$, 则磨头驻留 $A(x_d, y_d)$ 点时对点 $B(x_i', y_i')$ 的总的材料去除量为:

$$E(x_i', y_i') = R(x_d, y_d; x_i', y_i') D(x_d, y_d)$$

令 n_r 为驻留点的数量, n_r 为去除点的数量。则全部的驻留点对点 $B(x_i', y_i')$ 的去除总量可以表示为和式:

$$E(x_i', y_i') = \sum_{k=1}^{n_r} R(x_k, y_k; x_i', y_i') D(x_k, y_k)$$

由上述分析,将卷积计算转化为矩阵乘积计算^[8]。引入去除矩阵 \mathbf{R} 、驻留时间向量 \mathbf{d} 、残差去除量向量 \mathbf{e} , 其中 \mathbf{e} 的第 i 个元素为去除点 (x_i', y_i') 处的残差 $e_i = E(x_i', y_i')$; 同理有: $\mathbf{d}_k = D(x_k, y_k)$, 为磨头在第 k 个驻留点处的驻留时间。

$\mathbf{R}_{i,k} = R(x_k, y_k; x_i', y_i')$, 为磨头驻留点 (x_k, y_k) 处对去除点 (x_i', y_i') 的单位时间去除量。

则加工的模型变为去除函数矩阵与驻留时间向量的乘积:

$$\mathbf{R}\mathbf{d} = \mathbf{e}, \quad (2)$$

上式中矩阵或向量的大小 \mathbf{e} 为 $n_r \times 1$, \mathbf{d} 为 $n_r \times 1$, \mathbf{R} 为 $n_r \times n_r$ 。

由上面的分析可知,去除函数矩阵 \mathbf{R} 中的每一个元素都代表着一个驻留点对一个去除点的单位时间去除量,代表着驻留点、去除点及去除函数的信息。加工的模型由驻留函数与去除函数的卷积过程转变为去除矩阵与驻留时间向量的乘积过程。因此,驻留函数的求解变为式(2)的矩阵方程求解。

3 模型求解

由上面的分析可知驻留时间即为式(2)所确

定的代数方程的解。但在实际操作中,不能由式(2)直接解得驻留时间,其原因主要是在实际加工中,驻留点和去除点大多都是均匀分布的,所以不可避免使 \mathbf{R} 奇异或接近奇异。而且通过实际加工数据发现, \mathbf{R} 的条件数很大,即由式(2)得到的方程是一个典型的病态不适定问题 (Ill-posed Problem)。即当数据有微小变化时,将导致解出现不可接受的误差。而残差去除量 \mathbf{e} 是经过测量得到的,不可避免地带有一定的测量误差,如果还按照求解线性方程组的传统数值解法如高斯消去法、LU 或 QR 分解等解法求解方程组,则可能得到毫无意义的结果。同样的,对式(2)采用最小二乘法所求得解在物理上也常常是不能接受的。

3.1 Tikhonov 正则化

驻留时间的计算是一个典型的病态不适定问题,对于此类病态问题的求解,应遵循以下原则:(1)放弃精确求解的思路,转而寻找解的近似估计值;(2)加入额外的信息以帮助求解。人们把求解病态不适定型反问题的理论和方法称为正则化方法。为解算这类病态方程,许多学者提出和发展了各种有效的数值方法,其中最著名的方法是学者 Tikhonov 以第一类算子方程为基本数学框架,创造性地提出并得到深入发展的 Tikhonov 正则化方法^[9-10]。其基本思想是使用一簇与原问题相邻近的适定问题去逼近原问题的解。与仅考虑数据残差的最小二乘法不同, Tikhonov 正则化是一种兼顾残差和解的能量的方法,它的基本形式为:

$$\min_d (\| \mathbf{e} - \mathbf{R}\mathbf{d} \|_2^2 + \alpha \cdot \| \mathbf{L}\mathbf{d} \|_2^2)$$

其中 α 为正则化参数,一般为正数。当 \mathbf{L} 取单位阵时,称其为标准 Tikhonov 正则化。它等价于求解:

$$(\mathbf{R}^T\mathbf{R} + \alpha\mathbf{I}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{R}^T\mathbf{e}, \quad (3)$$

用奇异值分解进行上式的分析:

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha} \cdot \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}}{\sigma_i} \right) \cdot \mathbf{v}_i$$

可以看到, α 在上式中的作用是降低病态不适定问题中部分极小奇异值对应奇异向量所在方向上的噪声干扰。经过正则化后,方程右端噪声得到一定程度的抑制,方程有稳定解,可使用普通的线性方程组求解方法求出。

在正则化方法过程中,正则参数 α 起调节因子的作用, α 越大,求解过程的稳定性越好,但同

时与原问题的偏差加大,降低了解的分辨率及其与原问题的接近程度。若 α 较小,则起不到稳定求解过程的作用,被放大的噪声也会使解的精度降低。为说明 α 对驻留时间结果的影响,选用了一组面形数据进行计算,计算结果见图 2。通过比较,可以看出不同的 α 对加工后的面形产生的影响。

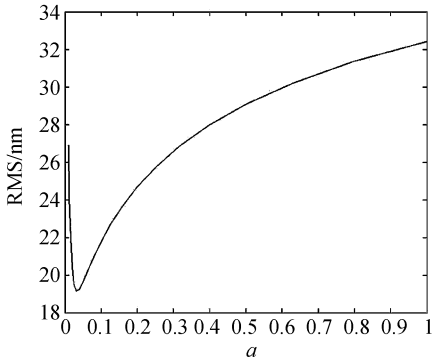


图 2 不同 α 对应的 RMS 结果

Fig. 2 RMS values with different α

实际上, α 的意义并不仅仅是数学上的。它代表着总的加工去除时间与加工后残差的权重度量,一个优秀的 α 值代表着加工去除时间和加工残余误差较好的分配方式,具有较高的加工效率。在总的加工去除量相差不多(甚至更小)的情况下,较合理的 α 值能够获得更好的加工后面形。所以在实施正则化方法的过程中,确定合适的正则化参数是十分重要的。

3.2 正则化参数

选择合适的正则化参数是一个重要且非常困难的问题,各国的学者做了很多的深入研究。通常有所谓先验的(prior)和后验的(posterior)两种策略,不少先验的策略具有理论分析价值,但在实际中常常难以验证其赖以施用的条件,因而关于确定正则参数的后验策略的研究更为普遍和实用。

在各种后验正则化参数确定方法中,不需要任何先验知识的 L-曲线法^[12]得到了广泛应用。L-曲线法是数学领域发展较为成熟的方法,是一种纯数学意义上的方法,不需要先验知识,并且具有较强的鲁棒性。具体操作如下:以 $\lg \| \mathbf{d}_k \|_2$ 作纵坐标,以 $\lg \| \mathbf{e} - \mathbf{Rd}_k \|_2$ 作横坐标,以正则化参数 α 为参变量绘出曲线图,该方法的典型特征是尺度图形中出现一条明显的 L 形曲线。 α 的最

优值位于曲线拐点处,曲线此处的曲率最大。虽然 L-曲线法具有很好的数值结果,但是它的计算量过大,考虑到求解的时间限制,本文没有采用 L-曲线法,而只是作为求解结果的参考。

本文引入一种自适应的正则参数选取方法^[11],使正则化参数朝着无因次噪声能量最小化的方向进行修正,无论迭代的初值如何选择,总可以自动修正到最优值。基于正则化参数 α 的特点: α 为一正数; α 随着 $\| \mathbf{e} - \mathbf{Rd} \|_2^2$ 的增大而增大; α 随着 $\| \mathbf{d} \|_2^2$ 增大而减小。因此令:

$$\alpha_{k+1} = \ln \left(\frac{\| \mathbf{e} - \mathbf{Rd}_k \|_2^2}{\| \mathbf{d}_k \|_2^2} + 1 \right), \quad (4)$$

α_{k+1} 为第 $k+1$ 次迭代的正则化参数; \mathbf{d}_k 为第 k 次迭代的 α_k 对应式(3)所求的方程解;迭代过程中,当相邻两次求解结果的差异很小,如 $\| \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k \|_2^2 / \| \mathbf{d}_k \|_2^2 \leq 10^{-6}$ 时就终止 α 的迭代。

说明:(1)正则化解中的元素仍有可能出现负值,这显然违背了时间的非负性。因此,必须进行相应处理,将负元素置零。例如,若 α_k 对应的 \mathbf{d}_k 中含有负元素,将负元素置零后得到的 \mathbf{d}_k^+ 替换 \mathbf{d}_k ,并代入式(4)迭代得到新的 α 。

(2)这里的迭代是指正则化参数 α 寻优计算,最优的 α 得出后,通过求解式(3)即可得到驻留时间向量。

需要说明的是,由式(4)并不能得到最优的正则化参数。但是,其最终结果与由 L-曲线法确定的最优正则化参数的结果相差不大,下表即为几组数据的计算结果比较:

由表 1 可以看出,两种方法得到的 α 值有所差异,但是没有出现不同数量级的情况。而对应的 α 计算出的驻留时间模拟加工结果的 RMS 值则相当接近,差异在 2% 以内。两者在计算上的花费却是相差很大的,以对式(3)进行求解的次数为单位:L-曲线法为 21、21、31 次,本文方法为 3、4、6 次。综合考虑计算花费以及最终结果,本文所使用的自适应正则化参数选择方法更为适用。

表 1 两种正则化参数选择方法的结果比较

Tab. 1 Results of two different methods for choosing regularization parameters

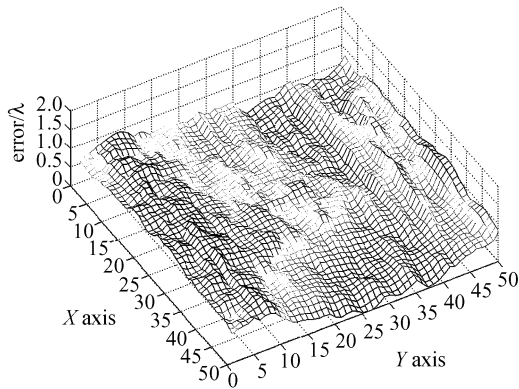
	L-curve	本文方法
第一组数据	$\alpha = 0.063 / \text{RMS} = 643.4$	$\alpha = 0.039 / \text{RMS} = 632.1$
第二组数据	$\alpha = 0.252 / \text{RMS} = 291.5$	$\alpha = 0.235 / \text{RMS} = 292.1$
第三组数据	$\alpha = 0.0079 / \text{RMS} = 13.19$	$\alpha = 0.0075 / \text{RMS} = 13.25$

4 实验仿真

4.1 算法对比

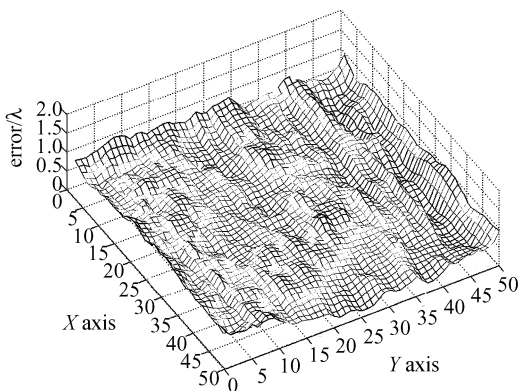
为说明本文算法在求解精度上的优点,采用相同的磨头去除函数和相同的初始面形误差,分别用傅里叶算法以及迭代算法计算驻留时间及其残余误差的大小,然后和本文提出的基于矩阵和正则化方法的驻留时间算法的结果进行了对比。

图3是经过以上各种驻留时间算法计算后的残余误差分布图。傅里叶变换法的结果不够理想,可能和需要经验选取的权重系数有关。经过计算,三种算法的最终RMS收敛比分别为0.38、0.5和0.67,均满足实际加工的计算精度要求。本文算法结果PV,RMS收敛比分别为0.43,0.67,相对傅里叶算法和迭代算法的结果均有提高。



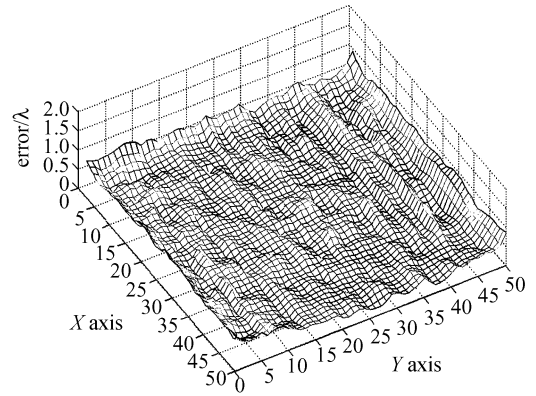
(a) 初始面形 $PV=1.22 \lambda$, $RMS=0.24 \lambda$

(a) Initial surface shape $PV=1.22 \lambda$, $RMS=0.24 \lambda$



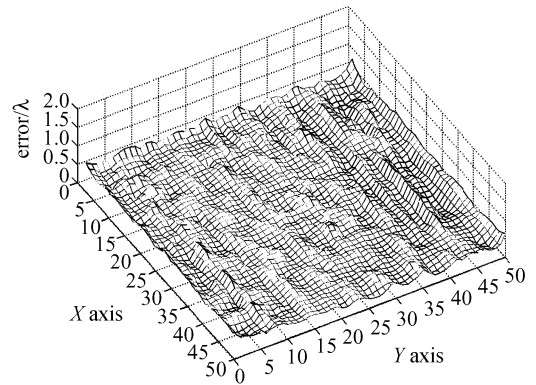
(b) 傅里叶变换法结果 $PV=1.02 \lambda$, $RMS=0.15 \lambda$

(b) Result of FFT algorithm $PV=1.02 \lambda$, $RMS=0.15 \lambda$



(c) 迭代算法结果 $PV=0.89 \lambda$, $RMS=0.12 \lambda$

(c) Result of iterative algorithm $PV=0.89 \lambda$, $RMS=0.12 \lambda$



(d) 本文算法结果 $PV=0.69 \lambda$, $RMS=0.08 \lambda$

(d) Result of matrix-based algorithm $PV=0.69 \lambda$, $RMS=0.08 \lambda$

图3 几种算法的结果对比

Fig. 3 Results of different algorithms

4.2 模拟加工

驻留时间作为CCOS加工中重要的控制参数,其求解的过程必须考虑到实际加工情况。因此,选用了由干涉仪测出的抛光阶段的面形数据并使用实际加工参数在PC上进行模拟加工。工件为 $1080 \text{ mm} \times 810 \text{ mm}$ 的体育场形,初始的面形数据为 $PV 595.5 \text{ nm}$, $RMS 48.3 \text{ nm}$ 。使用平转动的工作方式,根据实际加工经验选择磨头半径为 40 mm ,偏心距为 28 mm 。为了控制加工中出现的“边缘效应”^[12],磨头露边最多不超过磨头直径的 $1/3$,图4表示的是模拟加工的驻留点轨迹。

首先根据2.2节的方法,得到去除矩阵,然后通过式(4)计算正则化参数 α , α 的初值选择一个

较大的能使问题有稳定解的数值,如 $\alpha=1$,经过七次迭代,得到最优的 $\alpha=0.069$ 。将驻留时间结果代入式(2)得到模拟加工后的面型数据 PV 310.1 nm, RMS 18.6 nm。模拟计算结果 PV、RMS 收敛比分别为 0.48、0.62,满足实际加工要求。

工件边缘部分的残差依然很大,主要原因是磨头的行程受限而无法对工件边缘进行充分加

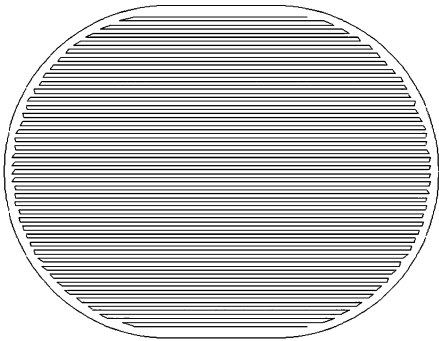
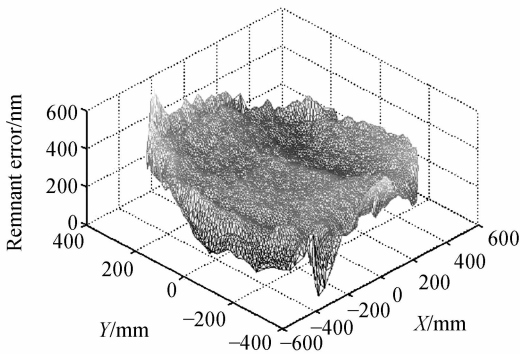


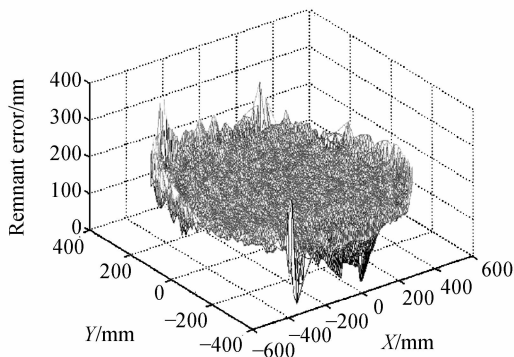
图 4 模拟加工的驻留点轨迹

Fig. 4 Path of the dwell points in simulation



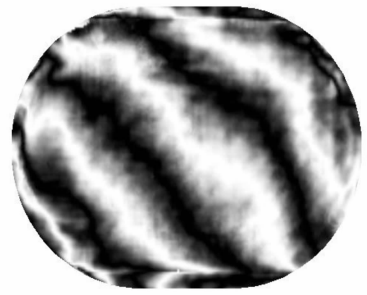
(a) 初始面形

(a) Initial surface shape



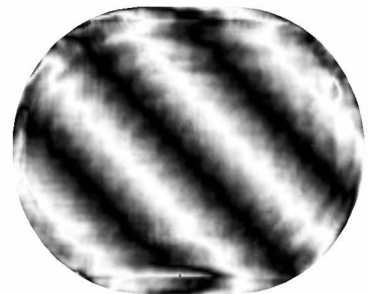
(b) 模拟加工后的面形

(b) Surface shape after simulation



(c) 初始面型干涉图

(c) Interference map of initial surface shape



(d) 模拟加工后的干涉图

(d) Interference map of after simulation

图 5 模拟加工结果及干涉图

Fig. 5 Simulation results and interference maps

工。它和工件边缘磨头压强的不均匀分布一起称为边缘效应,通过驻留时间修正边缘效应将是进一步的工作之一。

5 结 论

在 CCOS 中,驻留时间的计算是一个十分重要的环节,一定程度上决定了最后加工的结果。本文提出的基于线性代数的驻留时间算法,把加工的数学模型由卷积过程转变为去除矩阵与驻留时间向量的乘积过程,经过这样的处理后,就可以利用现阶段已经很成熟的矩阵运算技术在 PC 机上实现驻留时间的求解。矩阵方程的求解过程中使用 Tikhonov 正则化来消除矩阵方程的不适定性,获得了稳定的解。与迭代算法和傅里叶变换法的结果进行了比较,本文方法的求解精度的提高均超过了 30%。最后使用实际加工参数模拟加工结果的 PV、RMS 收敛比分别为 0.48 和 0.62,说明本文方法是一种稳定可靠且十分可行的驻留时间算法。

本文提出的基于线性代数的驻留时间算法方法稳定收敛,精度高,设置灵活,其优点简述如下:

(1)求解过程中使用了正则化的方法,使驻留时间求解过程稳定收敛。

(2)虽然本文的推导和模拟过程是基于平转动方式的,但此方法对于任意形状的去除函数和工件都适用。

(3)对驻留点和去除点的分布没有什么特殊要求,并不需要一致,可以根据实际需要分别设置和调整驻留点和去除点的位置。

(4)去除函数矩阵的每个元素的物理意义简单明了,表示单个驻留点对单个去除点的单位时间去除量,因此通过修改矩阵元素来解决 CCOS 中的变去除函数的驻留时间问题方便可行。

参考文献:

- [1] RUPP W J. The development of optical surfaces during the grinding process[J]. *Appl. Opt.*, 1965, 4(6):743-748.
- [2] JONES R A. Optimization of computer controlled polishing[J]. *Appl. Opt.*, 1977, 6(1):213-244.
- [3] JANSSON P A. *Deconvolution; with Applications in Spectroscopy*[M]. New York: Academic Press,1984.
- [4] 李全胜,成晔. 计算机控制光学表面成形驻留时间算法研究[J]. 光学技术,1999,(3): 56-59.
LI Q SH, CHENG Y. Dwell time algorithm in computer controlled optical surfacing [J]. *Optical Technology*, 1999,(3): 56-59. (in Chinese)
- [5] 王权陡,余景池. 数控抛光中不同运动方式下小抛光盘抛光特性之比较[J], 光学精密工程, 1999,7(5): 73-79.
WANG Q D, YU J CH. Polishing performance comparison of small polishing pad worked in different motion model in computer controlled optical polishing [J]. *Opt. Precision Eng.*, 1999, 7(5):73-79. (in Chinese)
- [6] STAHL H P. Aspheric surface testing techniques [J]. *SPIE*, 1990, 1332:66-76.
- [7] 王孝坤,张学军. 环形子孔径拼接干涉检测非球面的数学模型和仿真研究[J]. 光学精密工程, 2006, 14(4): 527-532.
WANG X K, ZHANG X J. Mathematical model and simulation for testing aspheric surface by annular subaperture stitching interferometry [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2006, 14(4): 527-532. (in Chinese)
- [8] CARNAL C L, EGERT C M, HYLTON K W. Advanced matrix-based algorithm for ion beam milling of optical components [J]. *SPIE*, 1992, 1752:54-62.
- [9] TIKHONOV A N. On solving incorrectly posed problem and method of regularization[J]. *Dokl Acad Nauk USSR*, 1963,151(3): 501-504.
- [10] GOLUB G H, HANSEN P C. Tikhonov regularization and total least squares [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Application*, 2000, 21(1):185-194.
- [11] LEE E S, KANG M G. Regularized adaptive high-resolution image reconstruction considering inaccurate subpixel registration [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2003, 12(7):826-837.
- [12] HANSEN P C. The use of the L-curve in the regularization of discrete Ill-posed problems[J]. *SIAM J. SCI. Comput.*, 1993,14:1487-1503.
- [13] JONES R A. Computer-controlled optical surfacing with orbital tool motion [J]. *Optical Engineering*, 1986, 25(6):785-790.

作者简介:邓伟杰(1983—),男,安徽安庆人,中国科学院长春光学精密机械与物理研究所在读博士研究生,主要从事光学表面数控加工方面的研究。E-mail: mr-deng@163.com

通讯作者:郑立功(1969—),男,博士,吉林长春人,现为中国科学院长春光机所副研究员,主要研究方向为先进光学制造技术。E-mail: ligongz@yahoo.com